ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

Решение задачи о максимальном потоке в сети методом Форда-Фалкерсона

Данная задача имеет множество возможных вариантов постановки, один из которых может быть сформулирован следующим образом. Имеется система магистральных трубопроводов, связывающих источник добычи нефти или газа с предприятием по его промышленной переработке. Отдельные участки трубопроводов оснащены компрессорными установками для поддержания требуемого давления, необходимого для транспортировки продукта. Известны предельные значения пропускной способности каждого участка рассматриваемой системы. В предположении, что источник обладает достаточными запасами продукта, требуется определить количество транспортируемого продукта по каждому из участков трубопроводной системы, так чтобы количество доставленного на предприятие переработки продукта было максимальным.

Оценочной функцией в данной задаче является количество продукта, доставленного на предприятие переработки, а ограничениями служат предельные значения пропускной способности каждого участка рассматриваемой системы.

Чтобы в общем случае сформулировать задачу о максимальном потоке в сети, для рассматриваемой системы магистральных трубопроводов построим граф. В данном графе одна из вершин, называемая источникам, будет соответствовать источнику добычи продукта, другая, называемая стокам, предприятию по переработке этого продукта. Остальные вершины графа интерпретируются как компрессорные станции. Каждое ребро графа в этом случае будет соответствовать наличию участка трубопровода между парой компрессорных станций. Вес ребра равен пропускной способности соответствующего участка трубопровода.

Таким образом, задача о максимальном потоке в сети формулируется как задача нахождения переменных значений величин потока по каждому ребру графа, которые не превышают весов соответствующих ребер и максимизируют общий поток от источника к стоку.

Пусть G = (V, E, h) - ориентированный граф, в котором V = $\{v_i, v_j\}$ конечное множество вершин, E = $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ - конечное множество h : E $\rightarrow Z_+$ - весовая функция дуг, которая интерпретируется как пропускная способность дуги. Дополнительно в графе фиксируются две верши начальная вершина v_s, которая называется исток, и конечная вершина v_t, которая называется сток. В предположении, что исходный граф G называется связным, т. е. вершина v_t потенциально достижима из v_s, и не содержит циклов, требуется определить поток максимального объема, протекающий из начальной вершины v_s в конечную вершину v_t.

Можно рассмотреть следующие неотрицательные целочисленные переменные - x_{ij}, которые интерпретируются как величина потока, проходящая по дуге $\{v_i, v_j\} \in E$. Тогда в общем случае математическая постановка задачи о максимальном потоке в сети может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{sj} \to \max_{x \in \Delta_\beta}, \qquad (1)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств и неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{j=1}^{n} x_{it} = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 (\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq s, i \neq t), \\ 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} (\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}), \\ x_{ij} \in Z_{+}^{1} (\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}). \end{cases} \qquad (2)$$

При этом первое ограничение требует выполнения следующего условия: величина потока, выходящего из вершины v_s (истока), должна быть равна величине потока, входящего в вершину v_t (сток). Вторая группа ограничений гарантирует выполнение следующего условия: любой поток, входящий в каждую промежуточную вершину графа, должен быть равен потоку, выходящему из этой вершины. Общее количество ограничений первого и второго равно n - 1. Третья группа ограничений требует выполнения следующего условия: величина потока, протекающего по дуге $\{v_i, v_j\} \in E$, должна быть неотрицательной и не должна превышать пропускной способности этой дуги c_{ij}. Наконец, последнее ограничение требует, чтобы все переменные принимали только неотрицательные целочисленные значения.

Одним из наиболее эффективных методов решения задачи о максимальном потоке в сети, учитывающих специфику рассматриваемой задачи оптимизации графах является алгоритм пометок Форда-Фалкерсона, который был предложен в 1957 г. Фордом и Фалкерсоном. Этот метод имеет итеративный характер и позволяет найти максимальный поток в сети, выходящий из начальной вершины и входящий в конечную вершину сети. Сущность метода заключается в построении на каждой итерации некоторого частичного потока, также выходящего из начальной вершины и входящего в конечную вершину исходной сети. Все такие частичные потоки в совокупности и представляют искомый максимальный поток. Блок-схема данного алгоритма изображена на рисунке 1.

Для описания алгоритма пометок Форда-Фалкерсона вводятся в рассмотрение 2 множества значений: $C_0 = \{ c_{ij} \}$ — множество дуг, образуемых некоторый поток, протекающий через дуги $(i, j) \in E$, $(i, j \in \{1, 2, ..., n\})$ исходной сети $G = (V, E, h)$ и $D_{max} = \{d_{ij}\}$ — множество значений максимального потока, протекающего через каждую дугу (i, j) $\in$ E, ($\forall$ i, j$\in$ {1, 2, ..., n}) исходной сети G = (V, E, h). По определению частичный и максимальный потоки выходят из начальной вершины $v_s \in$ V и входят в конечную $v_t \in$ V сети G = (V, E, h).

Рисунок 1 – Блок-схема пометок Форда—Фалкерсона

Отдельное множество значений C_0 = { c_{ij} } соответствует некоторому связному ориентированному пути, который начинается в начальной вершине $v_s \in$ V и заканчивается в конечной вершине $v_t \in$ V. При этом величина потока, которая может быть передана по этому пути, равна минимальной пропускной способности c_{ij} среди всех дуг, образующих этот связный ориентированный путь. При этом в качестве матрицы смежности исходной сети G = (V, E, h) удобно рассматривать матрицу C = {c_{ij}}, которая содержит пропускные способности дуг: h(i, j) $\in$ E, ($\forall$ i, j$\in$ {1, 2, ..., n}) исходной сети G = (V, E, h). До начала выполнения алгоритма предполагается, что C_0 = Ø и D_{max} = Ø, при этом соответствующие элементы этих множеств удобно считать равными 0.

Алгоритм расстановки пометок Форда-Фалкерсона или просто алгоритм пометок Форда-Фалкерсона имеет итеративный характер и заключается в выполнении следующих действий:

1 нахождение ориентированного пути с использованием некоторой процедуры перебора найти некоторый ориентированный путь C_0, выходящий из начальной вершины и входящий в конечную вершину сети, которая задана матрицей смежности C. Перейти к выполнению действий шага 2;

2 определение величины частичного потока в качестве величины частичного потока, протекающего по ориентированному пути C_0, присвоить значение: C_0 = min{c_{ij}}, где минимум берется по всем значениям пропускных способностей дуг, входящих в множество C_0. Перейти к выполнению действий шага 3;

3 изменение значений множеств D_{max} и С изменить значения максимального потока, образующих множество D_{max}, следующим образом: $d'_{ij} = d_{ij} + c_0$; изменить значения пропускных способностей дуг, образующих матрицу смежности С, следующим образом: $c'_{ij} = c_{ij} - c_0$. При этом изменяются только значения дуг, входящих в множество C_0. Перейти к выполнению действий шага 4;

4 проверка условия окончания алгоритма проверить выполнение условия: в сети G', образуемой матрицей смежности C', конечная вершина v_t, является достижимой из начальной вершины v_s. Если это условие не выполняется, то в сети G' отсутствует ориентированный путь C_0, выходящий из начальной вершины и входящий в конечную вершину сети, и выполнение данного алгоритма может быть закончено. Если же данное условие выполняется, то установить: $D_{max} = D'_{max}$, $C = C'$, $C_o = \varnothing$ и перейти к выполнению действий шага 1.

Поскольку исходный сетевой граф по определению конечен и не содержит циклов, то рассмотренный алгоритм пометок Форда-Фалкерсона также конечен. Однако определить в общем случае точное количество необходимых для его выполнения итераций не представляется возможным, поскольку заранее неизвестно количество различных ориентированных путей, которые связывают начальную вершину сети с ее конечной вершиной. Можно только оценить максимальное количество возможных итераций, которое служит оценкой трудоемкости данного алгоритма в худшем случае.

В результате выполнения этого алгоритма будет определено $D_{max} = \{d_{ij}\}$ множество значений максимального потока, протекающего через каждую ($\forall$ i, $j \in \{1, 2, ..., n\}$) исходной сети G = (V, E, h).

Таким образом, алгоритм пометок Форда-Фалкерсона позволяет определить множество значений максимального потока, протекающего через каждую дугу исходной сети.

Можно проиллюстрировать использование рассмотренного алгоритма пометок Форда-Фалкерсона для решения задачи о максимальном потоке в сетевом графе, который изображен на рисунке 2.

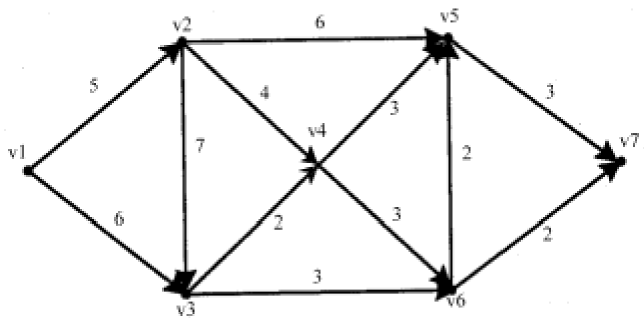

Рисунок 2 - Сетевой граф задачи о максимальном потоке

Для этого в соответствии с описанным алгоритмом выполняются следующие действия:

1 шаг 1 (первая итерация) для исходной матрицы смежности C определяются ориентированный путь C_0, выходящий из начальной вершины и входящий в конечную вершину сети, который содержит следующие пропускные способности дуг: $C_0 = \{c_{12}, c_{25}, c_{56}\}$;

2 шаг 2 (первая итерация) величина частичного потока по найденному пути: $C_0 = \min\{5, 6, 3\} = 3$;

3 шаг 3 (первая итерация) новые значения множества D_{max} равны: $\{d_{12} = 3, d_{25} = 3, d_{56} = 3\}$. Новые значения матрицы смежности C равны: $\{c_{12} = 2, c_{13} = 6, c_{23} = 7, c_{24} = 4, c_{25} = 3, c_{34} = 2, c_{36} = 3, c_{45} = 3, c_{46} = 3, c_{65} = 2, c_{57} = 3, c_{67} = 2\}$. Остальные значения этих матриц равны 0. Данной матрице смежности соответствует новый сетевой граф, который изображен на рисунке 3.

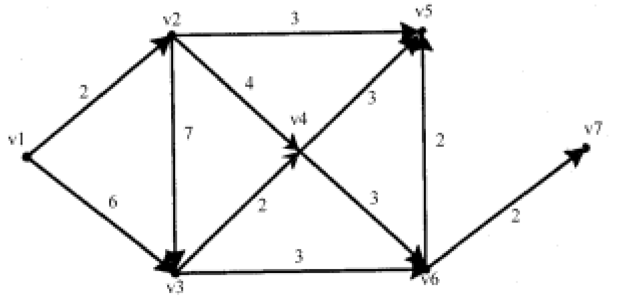

Рисунок 3 - Новый сетевой граф задачи о максимальном потоке в сети, полученный на первой итерации алгоритма

4 шаг 4 (первая итерация) поскольку условие окончания алгоритма не выполняется, что видно из визуального анализа рисунка 2, следует перейти к выполнению шага 1;

5 шаг 1 (вторая итерация) для новой матрицы смежности C определятся ориентированный путь C_0, выходящий из начальной вершины и входящий в конечную вершину сети, который содержит следующие пропускные способности дуг: $C_0 = \{c_{13}, c_{36}, c_{67}\}$;

6 шаг 2 (вторая итерация) величина частичного потока по пути $C_0 = \min\{6,3,2\} = 2$;

7 шаг 3 (вторая итерация) новые значения множества D_{max} равны: $\{d_{12} = 3, d_{25} = 3, d_{56} = 3, d_{13} = 2, d_{36} = 2, d_{67} = 2\}$. Новые значения матрицы смежности C равны: $\{c_{12} = 2, c_{13} = 4, c_{25} = 3, c_{36} = 1\}$. Остальные значения этих матриц равны 0. Данной матрице смежности соответствует новый сетевой граф, который изображен на рисунке 4.

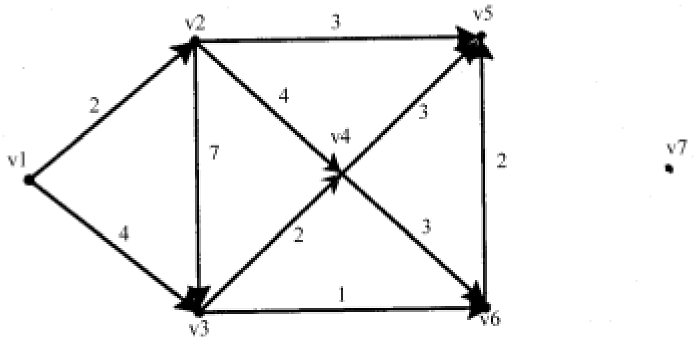

Рисунок 4 - Новый сетевой граф задачи о максимальном потоке в сети, полученный на второй итерации алгоритма

8 шаг 4 (вторая итерация) поскольку условие окончания алгоритма выполняется, а также из визуального анализа рисунка 3 видно, что отсутствует связный ориентированный путь из начальной вершины в конечную вершину и на этом выполнение данного алгоритма заканчивается.

Результатом решения задачи о максимальном потоке в сети с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона являются найденные оптимальные значения максимального потока D_{max}, протекающего через каждую дугу исходной сети: $d_{12} = 3$, $d_{25} = 3$, $d_{56} = 3$, $d_{13} = 2$, $d_{36} = 2$, $d_{67} = 2$, остальные значения равны 0. Найденному оптимальному решению соответствует значение целевой функции $f_{opt} = 5$.

Анализ найденного решения показывает, что максимальный поток в сети, проходящий из вершины 1 в вершину 6, протекает по следующим дугам: по дуге (1,2) в количестве 3 м/час, по дуге (1,3) в количестве 2 м/час, по дуге (2,5) в количестве 3 м/час, по дуге (3,6) в количестве 2 м/час, дуге (6,7) в количестве 2 м/час, по дуге (5,6) в количестве 3 м/час. При этом общая величина потока транспортируемого продукта для рассматриваемой сети также равна 5 м/час.